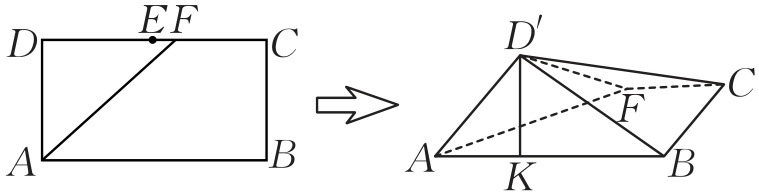
## **培优课16 立体几何中的综合应用**

### **培优点一 翻折问题**

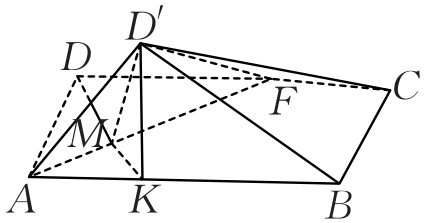
#### **审题指导**

典例1 如图，在长方形中，，，为的中点，为线段（端点除外）上一动点，现将沿折起，使点落在点的位置，且（审题①考虑面面垂直的性质得到线面垂直），（审题②考虑点），设，则的取值范围是.



**解题观摩**

[解析]如图，过作，垂足为，连接.



由平面 平面，平面 平面，，得 平面，因为 平面，，…………审题①

又,, 平面, 平面，所以 平面，所以，

即 .…………审题②（注意：本题的关键点是推出，达到“降维”目的，将空间问题平面化）

由翻折的性质得，

所以.

由，得.

\*另解（三余弦定理法）：由三余弦定理得,

所以，且，

所以.

#### **通性通法**

**解决与翻折相关问题的三点关键**

1.盯住量，即看翻折前后线面位置关系的变化情况，根据翻折过程，把翻折前后没有变化和发生变化的量准确找出来，因为它们反映了翻折后空间图形的特征；

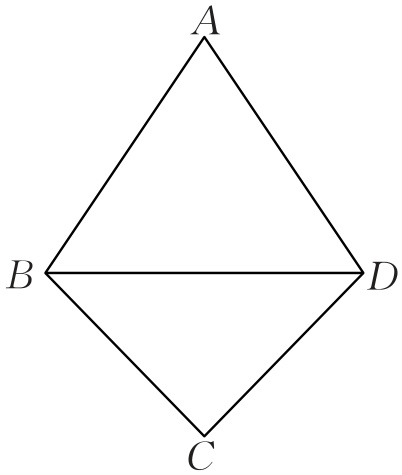
2.会转化，根据需要解决立体几何问题，确定转化的目标；

3.得结论，对转化后的问题，用定义、判定定理、性质定理、基本事实、公式等解决.

#### **培优训练**

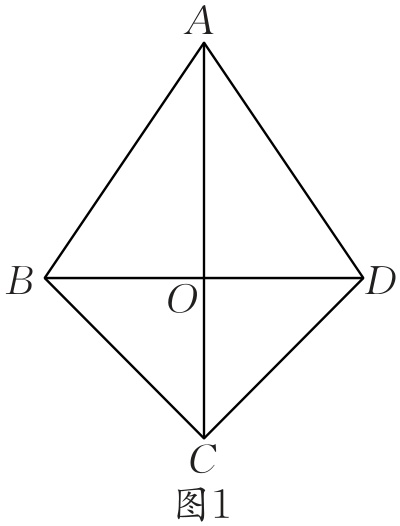
##### **由求线段到求余弦值设问变式**

1. 如图,在四边形中，，.现将沿折起，当平面与平面垂直时，直线与所成角的余弦值是( D ).



A. B. C. D.

[解析]在四边形中，连接交于点，如图1所示，



，，

又因为，所以，

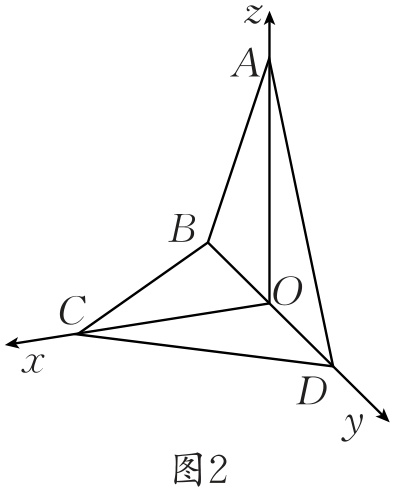
所以，故，即，，,

且，，

翻折后，对应地，，

因为，所以 平面，

以为坐标原点，,,所在直线分别为,,轴建立如图2所示的空间直角坐标系，



则点，，，，

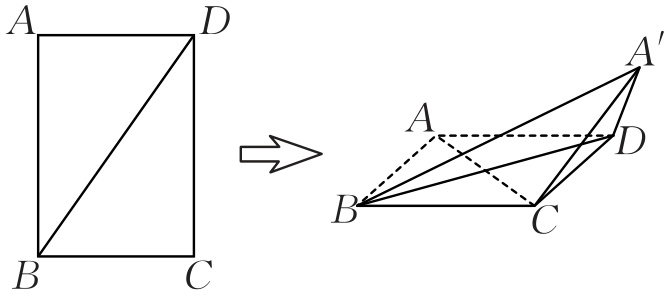
所以，，

，

因此直线与所成角的余弦值是.故选.

##### **由求线段到求线面角最值设问变式**

2. 如图，在矩形中，，，现将沿着对角线翻折成，并且满足，则直线与平面所成最大角的余弦值为( B ).



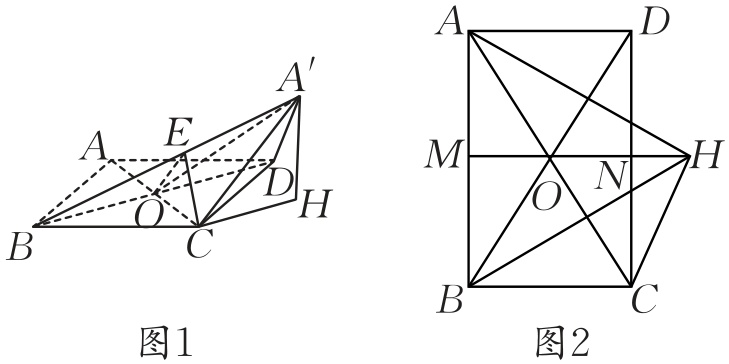
A. B. C. D.

[解析]如图1，设点在底面中的射影为，则是与平面所成的角，.

在翻折过程中，，

点在底面的射影为, 平面,又 平面,,

又，则，即在的中垂线上（如图2）.



取的中点，连接,

，，又，

平面，，又是的中点，，则.

又，，由得，

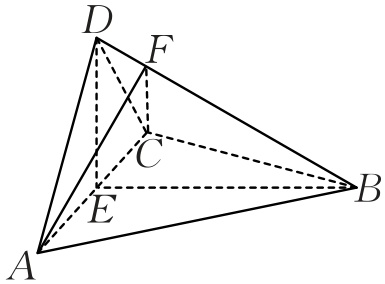
在直角梯形中，，

从而，其最小值为，当且仅当时取等号.故选.

### **培优点二 探索性问题**

#### **审题指导**

典例2 如图，在四面体中，，（审题①证明三角形全等），（审题②三线合一）.设, ，点在上，（审题③转化为垂线段最小问题），求与平面所成的角的正弦值.



**解题观摩**

[解析]如图，连接，因为，为的中点，.…………审题②

在和中，因为,,，，…………审题①

所以，又因为为的中点，,…………审题②

又因为， 平面, 平面，所以 平面，因为 平面，所以，所以，

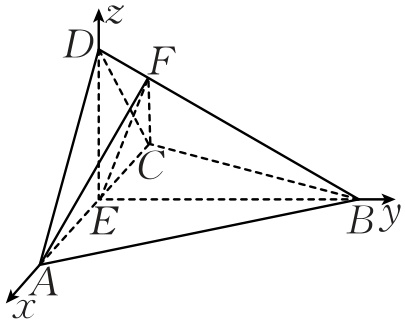
.…………审题③

因为，所以，又因为 ，所以是等边三角形，

因为为的中点，所以，，因为，所以,

在中，，所以，,故以为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，如图所示，

则,,，所以,，



设平面的一个法向量为，则取，则，

又因为,，所以，所以，

设与平面所成的角为，

则，

所以与平面所成的角的正弦值为.

#### **通性通法**

1.**解决线面关系中存在性问题的策略**

对于线面关系中的存在性问题，首先假设存在，然后在该假设条件下，利用线面关系的相关定理、性质进行推理论证，寻找假设满足的条件.若满足，则肯定假设；若得出矛盾的结论，则否定假设.

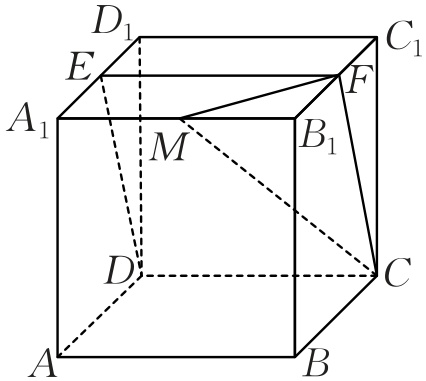
2.空间角存在性问题的解题策略

借助空间直角坐标系，把几何对象上动态点的坐标用参数（变量）表示，将几何对象坐标化，这样根据题设要求得到相应的方程或方程组.若方程或方程组在题设范围内有解，则通过参数（变量）的值反过来确定几何对象的位置；若方程或方程组在题设范围内无解，则表示满足题设要求的几何对象不存在.

#### **培优训练**

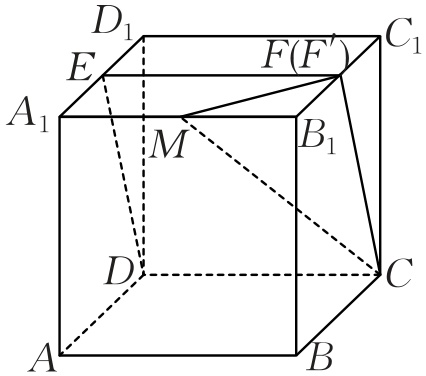
##### **探索面积最小变为探索点的位置设问变式**

如图,在正方体中，为的中点，与平面交于点.



（1） 求证：为的中点.

[解析]如图，取的中点，连接,，



由于为正方体，,分别为,的中点，故，

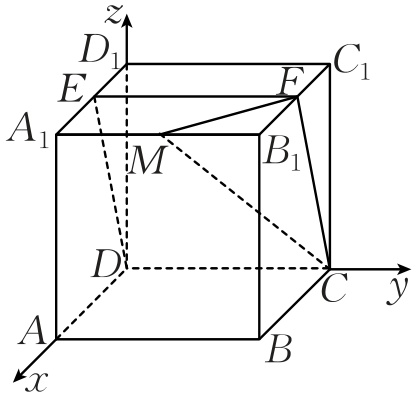
从而,,,四点共面，即平面即平面，

据此可得，直线交平面于点，

直线与平面相交时只有唯一的交点，故点与点重合，即为的中点.

（2） 在棱上是否存在点，使得二面角的余弦值为？若存在，求的值；若不存在，请说明理由.

[解析]存在.理由如下：以为坐标原点，,,所在直线分别为轴，轴，轴正方向，建立空间直角坐标系，



不妨设正方体的棱长为2，且，则,,,，

所以,,，

设平面的一个法向量为，则

令，可得，

设平面的一个法向量为，则

令，则,，可得，

从而,,，

则，

整理可得，故或（舍去）.

故存在点，使得二面角的余弦值为，此时.